

Ruwweg zijn de stappen voor het analyseren van een beslissingsprobleem.

1. opsommen van de mogelijkheden tot informatie verzamelen, experimenteren en andere jandelingen;
2. opsommen van de gebeurtenissen die mogelijkerwijs voorkomen;
3. in chronologische volgorde rangschikken van de informatie die verkregen kan worden en de beslissingen die in het verloop van de procedure gemaakt kunnen worden;
4. beslissen in welke mate de consequenties van de verschillende mogelijke handelwijzen je "bevallen";
5. beoordelen van de kans dat bepaalde onzekere gebeurtenissen voorkomen.

Hierna kan deze informatie tot een synthese verwerkt worden.

Raiffa is een overtuigd Bayesiaan, en hanteert dus zowel utiliteiten als subjectieve waarschijnlijkheden.

Er is een grote overlap van het hier behandelde met gebieden als spel theorie, operations research, en systems analysis.

De behandeling van het onderwerp is niet mathematisch.

Raiffa wil, als Bayesiaan, intuïtieve oordelen en gevoelens direct bij de formele analyse van beslissingsproblemen introduceren.

Commentaar. De vraag is, bij het lezen van dit boek, "wat is de relevantie van deze beslissingstheorie voor onderwijssituaties"? Dit is niet zonder meer duidelijk, vooral omdat ook in de bedrijfssituatie (vooral ook oorlogssituaties) deze benadering slechts toegepast wordt bij problemen waar werkelijk grote (financiële) belangen op het spel staan. Dit omdat voor het oplossen van problemen volgens beslissingstheoretisch model een forse staf deskundigen met hulpmiddelen en een ruim tijdsprogramma ingeschakeld moeten worden. Ik denk dan ook dat het praktisch belang van een en ander in het onderwijs nihil zal zijn (tenzij het gaat om planning vanuit Den Haag bijv.).

Het belang van de beslissingstheorie ligt mijns inziens hierin, dat het een model levert van waaruit vele telkens terugkerende beslissingsproblemen in het onderwijs (toelating, beoordeling, begeleiding) op theoretisch niveau bestudeerd kunnen worden, met als mogelijk resultaat dat op grond van deze analyses enkele traditionele beslissingsstructuren zullen verdwijnen, en andere, meer verantwoorde, daarvoor in de plaats zullen komen. Wanneer het daarbij mogelijk is om waardeoordelen in de beslissingen te betrekken, om m.a.w. af te stappen van het puur kwantitatieve model zoals dat nu gehanteerd wordt, dan zou zelfs een beslissende stap gezet kunnen worden in de richting van een meer humaan onderwijs (weg van het technokratische beroeps onderwijs stelsel). Stel dat we moeten beslissen of een bepaalde student (at random gekozen uit alle aankomende eerstejaars) geschikt is om een universitaire studie te volgen. Stel dat 80% van de studenten geschikt is, en 20% ongeschikt. We kunnen de volgende tabel opstellen, waarbij we invullen de opbrengst die bij ieder mogelijk paar besluitwerkelijkheid hoort (laten we zeggen dat het gulden zijn die door de verantwoordelijke docent verdiend of verloren kunnen worden.)

werkelijkheid is:	BESLUITEN			kans op deze werkelijkheid
	aannemen	afwijzen	niet besluiten	
geschikt	40	5	0	.80
ongeschikt	20	100	0	.20
V0=Verwachte Opbrengst	28	16	0	

Om het risico 5 of 20 gulden te verliezen, te vermijden, kan de docent besluiten geen beslissing te nemen. Dergelijke handelwijzen kunnen vaak zeer reëel zijn, en zullen in volgende hoofdstukken ter sprake komen. Voorlopig kijken we alleen naar statistisch verantwoorde strategieën. De verwachte (=gemiddelde) opbrengst V0's, zijn de bouwstenen van een dergelijke strategie.

Voordat onze docent zijn besluit neemt, kan hij op verschillende manieren aan extra informatie komen. We hebben al bekend verondersteld dat 80% van de studenten geschikt en 20% ongeschikt zijn. Stel nu dat alle studenten een examen van 10 vragen hebben afgelegd, waarbij op miraculeuze wijze alle geschikte studenten 6 vragen goed hadden, en alle ongeschikte slechts 1 vraag goed. Voor iedere student is de uitslag van iedere vraag, goed of fout, op een apart kaartje geschreven, voor iedere student zijn die 10 kaartjes in een afzonderlijke doos gestopt. Stel nu dat de docent de volgende mogelijkheden tot het verkrijgen van informatie heeft:

e 0 : geen informatie, kost niets
 e 1 : hij mag 1 kaartje inzien tegen betaling van F. 8,--
 e 2 : hij mag 2 kaartjes inzien tegen betaling van F. 12,
 e 3 : hij mag 1 kaartje inzien tegen betaling van F. 9,, waarbij hij het recht heeft om dan ev. alsnog een 2de kaartje in te zien tegen betaling van F. 4,50. Hij mag zelf weten of hij dan het eerste kaartje teruglegt of niet voordat hij een tweede kaartje trekt.

Dit voorbeeld lijkt ietwat gekunsteld, dat is dan ook gedaan terwille van het voorbeeld. Het helpt wel om je voor te stellen dat de kosten van informatie in werkelijkheid de kosten van een onderzoek en selectie procedure kunnen zijn, waarbij bijv. beslissingen over de te gebruiken testbatterij genomen moeten worden waarbij de kosten van afzonderlijke tests kunnen variëren, evenals de informatie die zij bij kunnen dragen. Het e 0 alternatief is al afgebeeld in de eerste tabel, de beste keuze in die situatie is om de student geschikt te verklaren. De VO hiervan is F. 28,.

Het e1 alternatief is een stuk complexer. We trekken een kaartje, waarvan de uitkomst (goed of fout) een verschillende kans heeft voor de verschillende werkelijkheden (het geschikt of ongeschikt zijn van de student). We hebben nu te maken met een aantal opeenvolgende situaties waarin we zelf een besluit nemen én waar ach.wo voor ons een besluit genomen wordt, nl. afhankelijk van het resultaat van het trekken van een kaartje of de werkelijkheid.

Alle e1 mogelijkheden zijn in de volgende tabel aangegeven, waarbij de uitslag goed of fout op een kaartje voorgesteld wordt door G of F, geschikt of ongeschikt, besluitname door a en o en geschikt of ongeschikt in werkelijkheid door A en 0 resp. (aannemen ongeschikt)

tabel voor e 1

besluit werkelijkheid opbrengst			
uitslag e1 is F	a	A	f. 40,--
		0	f. 20,--
	o	A	f. 5,--
		0	f. 100,-
uitslag	a	A	f. 40,--
		0	f. 20,--
	o	A	f. 5,--
		0	f. 100,-

Voor e 2 en e 3 kunnen dergelijke tabellen opgesteld worden.

Het probleem is nu de invloed van de kanselementen (uitslag e1, en de werkelijkheid) te bepalen. De kans op A is .8 en op 0 is .2 zoals we weten. Na het trekken van een kaartje zijn deze kansen echter veranderd, op basis van de verkregen extra informatie kunnen we een betere "gok" maken. Om nu in ieder vel van de tabel de bijbehorende kans te kunnen uitrekenen, maken we gebruik van de stelling Bayes, bijv.:

$$P(A | F) = P(F|A) P(A) / P(F)$$

Stel dat we de volgende tabel hebben (kijk even niet naar de ingevulde kansen):

uitslag e1 werkelijkheid opbrengst			
F	.50	A	.64
		0	.36
G	.50	A	.94
		0	.04

De kansen die berusten op de bekende gegevens zijn

$$\begin{aligned} P(A) &= .8 & P(B) &= .2 \\ P(F|A) &= .4 & P(F|0) &= .9 \\ P(G|A) &= .6 & P(G|0) &= .1 \end{aligned}$$

Deze kunnen we niet in bovenstaande tabel invullen (omdat de uitslag van e1 de kansen op A of 0

verandert), maar wel in de volgende tabel:

werkelijkheid		uitslag e1	opbrengst
A	.8	F .4 (=P(F A))	.8•.4 = .32
		O .6	.48
O	.2	F .9	.18
		G .1	.02

In de kolom opbrengst komen de bijbehorende kansen op die bepaalde opbrengst voor, die op de aangegeven wijze berekend zijn. Maar deze kunnen we ook in de vorige tabel vinden! Bijv. de kans op zowel A als F is $P(A) \cdot P(F|A) = .32 = P(F) \cdot P(A|F)$. Om vervolgens $P(A|F)$ te berekenen maken we gebruik van de genoemde stelling van Bayes. $P(F)$ is eenvoudig $.32 + .18 = .50$.

Immers, $P(F) = P(A)P(F|A) = P(O)P(F|O) = .32 + .18$
Dus : $P(A|F) = P(F|A) \cdot P(A)/P(F) = .32/.5 = .64$
en $P(O|F) = .18/.5 = .36$ etc. zoals in de tabel ingevuld.

We gaan nu weer terug naar e_0 , waar we zonder informatie te verzamelen, moeten beslissen.

besluit		werkelijkheid		opbrengst
a	28, = (V.O.)	A	.8	40,--
		O	.2	-20,--
[O]	16, = (V.O.)	A	.8	-5,--
		O	.2	100,--

De gegevens uit deze tabel zijn ons bekend, achter de besluiten is de Verwachte Opbrengst aangegeven. De vraag waar het ons om te doen is : wat is het "beste" besluit, a of o? V.O. (a) > V.O. (O), dus we besluiten a, omdat de Verwachte Opbrengst voor a het grootst is. De andere mogelijke besluiten zetten we tussen []. Deze werkwijze noemt Raiffa de "averaging out and folding back procedure", in de literatuur ook vaak omschreven als "the process of backwards induction in the theory of dynamic programming". We kunnen nu de hele beslissingstabel voor ons probleem uitrekenen, gebruik makend van de Bayes formule:

(komt tabel volgende bladzijde)

informatie uitslag									
besluit		informatie		besluit		werkelijkheid		opbrengst	
weigert te spelen									
[e0]	28,--	---	a	28,--	A	.8	40		
					0	.2	20		
			[o]	16,-	A	.8	5		
					0	.2	100		
[e1]	F	.5	32,80	[a]	18,40	A	.64	40	
35,20-8,-						0	.36	-20	
(kosten inf.									
aftrekken)				o	32,80	A	.64	5	
						0	.36	100	
	G	.5	37,60	a	37,60	A	.96	40	
						0	.04	20	
				[o]	0,80	A	.96	5	
						0	.04	100	
[e2]	FF	24/90	58,	[a]	4,	A	.4	40	
42,4012,						0	.6	20	

(kosten informatie aftrekken)					
	o 58,	A	.4	5	
		0	.6	100	
F6 of GF 42/90 34,86	a 34,86	A	64/70	40	
		0	6/70	20	
	[0] 4,	A	64/70	5	
		0	6/70	100	
GG 24/90 40,	a 40,	A	1.0	40	
		0	0	20	
	[o] -5,-	A	1,0	-5	
		0	0	100	

inf. besluit	UTTSLAG inform.	tussen besluit	tussen besluit	uitslag	besluit	werkelijkheid kans, en opbrengst		
es 40,15-9 (want	F .5 42,71	doorgaan 47,21 -4,50	[terug leggen] 45,76	F .58 53,66	[a] 6,48	A 128/290	40,=	
						0 162/290	-20,=	
					o 53,06	A 128/290	-5,=	
						0 162/290	100,=	
				G .42 34,86	a 34,86	A 64/70	40,=	
						0 6/70	-20,=	
					[o] 4,=	A 64/70	-5,=	
						0 6/70	100,=	
		niet terug-leggen 47,22		F 8/15 58,=	zelfde als e2, FF			
				G 7/15 34,86	zelfde als e2, FG			
		[stoppen] 32,80	zelfde als e1, F					
G .5 37,60	stoppen 37,60	zelfde als e1, G						
	[door-gaan] 37,60 -4,50 (want inf. kosten aftr.)	niet terug-leggen 37,60		F 42/90 34,86	zelfde als e2, FG			
				G 48/90 40,=	zelfde als e2, GG			
		[terug-leggen] 37,59		F .42 34,86	a 34,86	A 64/70	40,=	
						0 6/70	-20,=	
					[o] 4,=	A 64/70	-5,=	
						0 6/70	100,=	
				G .58 39,59	a 39,59	A 144/145	40,=	
						0 1/145	-20,=	
					[o] 4,=	A 144/145	-5,=	
						0 1/145	100,=	

De verwachte opbrengst voor het hele probleem is dus $40,15 - 9,00 = F. 31,15$. De flippingbook procedure voor de kansen m.b.t. de e 2 en de e 3 procedure worden op blz.36 en 3/ expliciet gegeven.

Hoofdstuk 4. Utiliteits theorie

In het voorgaande hebben we gewerkt met Verwachte Opbrengst, objectief berekend. Nu gaan we over op de subjectieve toer. Stel je voor de volgende loterij:
een kans van .8 op f. 40,-

,, ,, ,, .2 op f.20,.

De O.V. hiervan is, zoals we vroeger al zagen, $.8 \times 40 + .2(20) = f. 28$, en we kenden aan deze "loterij" een waarde van 28 gulden toe.

Nu zijn er heel wat mensen die liever een tientje in de hand hebben dan aan deze loterij, met een V.O. van 28 gulden, mee te doen.

Hoewel de beslissing in ons geval objectief F. 28, is, is het mogelijk dat we subjectief een lager bedrag zouden willen vast

stellen. We kunnen nu de beslissingstabel uitwerken door niet de V.O. te hanteren, maar door telkens de subjectieve waarde in te vullen, en dan op dezelfde wijze naar het begin terug te werken als gedaan werd m.b.v. de V.O. waarden. De subjectieve opbrengst noemen we S.O. Een zeer complex probleem kunnen we op deze wijze toch bevredigend oplossen door alle deelproblemen subjectief te waarderen. waarbij ieder deelprobleem een redelijk overzienbare zaak is. Het vaststellen van de S.O. is een kwestie van bepalen wat het laagste bedrag is waarvoor je de betreffende kans nog zou willen "verkopen", omdat je voor een lager bedrag liever de gok waagt.

Laten we zeggen dat in het straks gegeven voorbeeld je de V.O. van 28,, waar immers een risico om 20 gulden te verliezen aan vast zit. zou willen ruilen voor 15 gulden vast in het handje, maar zeker niet voor minder. Dan vullen we in de beslissingstabel op het betreffende punt niet 28,, maar 15,. Op deze wijze vervangen we alle V.O.'s door S.O.'s.

Maar stel nu dat we een deelprobleem hebben dat nogal ingewikkeld is, zoals in de volgende tabel.

besluit	kans op opbrengst
e	.13 18,= .27 7,= .23 3,= .17 16,= .20 72,=

De V.O. is simpel $.13 \times (18) + .27 \times (7) \dots = F. 13,06$ Maar welke S.O. ben je bereid aan deze "loterij" toe te kennen?

Om dit soort problemen op te lossen haalt Raiffa een enorme truc uit, die ofwel geniaal is, ofwel een slimme wisseltruc is. We zullen dat uitzoeken. Het hulpmiddel waar in het vervolg uitgebreid gebruik van gemaakt gaat worden, is een loterijgedachten, met welomschreven prijzen, en wel omschreven kansen daarop. Stel bijvoorbeeld dat de prijs F. 1.000, bedraagt, en dat er loten zijn waarop de getallen 0 .01 .02 o.... .99 1.00 Dan stelt een lot met getal .45 een kans van 45/100 op de prijs van F. 1.000, voor (het alternatief is geen prijs, maar ook geen verlies). Stel nu dat we het volgende beslissingsprobleem hebben:

besluit	kans op opbrengst
a	.3 lot .4 .5 ,, .7 .2 ,, .5
o	.6 ,, .4 .3 ,, .8 .1 ,, .3

De opbrengst is gegeven in termen van loten in de F. 1.000,= loterij, ieder lot is een bepaalde kans op de prijs. Besluit a levert volgens een bekende berekening: $.3 \times .4 + .5 \times .7 + .2 \times .5 = .57$ een waarde van .57 op, d.w.z. een lot in de F. 1.000, loterij met een kans van 57/100 pp de prijs. We kunnen zeggen dat .57 een Verwachte Lot Waarde is. Voor o vinden we een Verwachte Lot Waarde van .51. Nu moeten we kiezen tussen lot .57 en lot .51, waarbij we aannemen dat we in dergelijke gevallen altijd kiezen voor de grootste kans op de prijs, d.w.z. voor beslissing a die equivalent aan een lot .57 Dit laatste berust op het feit, dat we de loterij zo gemaakt hebben dat we F. 1.000,= prefereren boven niets (We kunnen willekeurig welke prijzen kiezen, als we de één maar prefereren boven de ander). Merk op dat we nu met onbezwaard gemoed een V.O. procedure kunnen volgen, het heeft geen zin hier met subjectieve waarden te werken. Dit is alles nog voorbereiding op de truc!

HET SUBSTITUTIE PRINCIPE: Wanneer een beslissingsprobleem veranderd wordt door voor één van de mogelijke uitkomsten een andere opbrengst te nemen, waarbij de oorspronkelijke en de nieuwe opbrengst voor de beslisser evenveel "waard" zijn, dan is het nieuwe beslissingsprobleem voor hem equivalent aan het oorspronkelijke (alle andere dingen gelijk gebleven).

Dit stelt ons in staat om voor een bepaalde opbrengst, bijv. een vacantiereis naar Cuba, een lot met een omschreven kans op een bepaalde (geld) prijs in de plaats te stellen, waarbij beide subjectief evenveel "waard" zijn. Bijvoorbeeld, wanneer het ons om het even is of we direct een exemplaar van Oosthoek's encyclopedie krijgen of een kans van .7 op een prijs van F. 1.000,=, dan zijn de volgende beslissingsproblemen voor ons equivalent, en wel allebei gelijk aan de waarde van een lot met kans .57 op F. 1.000,

----- kans op : opbrengst -----		----- kans op : opbrengst -----	
.3	lot .4	.3	lot .4
.5	Oosthoek	.5	.7
.2	lot .5	.2	.5
-----		-----	

Wanneer de Oosthoek ons meer waard is dan 1.000,=, dan nemen we een ander loterij als uitgangspunt, bijv. met een prijs van F. 10.000, en verder niet. (de andere lotwaarden .4 en .5 moeten dan ook op deze nieuwe loterij afgestemd worden). We zijn nu in principe in staat om voor ieder beslissingsprobleem opbrengsten van objectieve in subjectieve waarden te vertalen, waarna we het probleem eenvoudig uit kunnen rekenen op basis van Verwachte Opbrengst, waarbij we telkens deze V.O. maximaliseren. Wanneer er negatieve opbrengsten voorkomen, kunnen we een loterij nemen met alternatieve prijzen van min F. 1.000,= en plus F. 1.000,= om maar een willekeurig voorbeeld te nemen. Een lot .4 geeft een kans van 4/10 op 1.000,= en een kans van 6/10 op F. 1.000,=. Wanneer we uitzetten wat verschillende loten ons waard zijn in contante sommen gelds, dan krijgen we een indifferentiecurve voor de betreffende loterij.

verticaal: lot; horizontaal: hoeveelheid geld

In het gegeven voorbeeld willen we een .5 lot kwijt voor F. 200,= d.w.z. we hebben er F 400,= voor over om van het lot af te komen. De Verwachte Opbrengst van het lot is echter F. 0,=. Voor iemand die alleen met Verwachte Opbrengst rekent, ligt de indifferentie curve volgens de onderbroken rechte lijn.

Voor iemand die afkerig is van risico's loopt de curve altijd [stijgend en bol] nooit [stijgend en hol], in wiskundige termen: de tweede afgeleide van de indifferentie functie is negatief.

De loterij truc is niets anders dan het toekennen van UTILITEIT aan ieder van de afzonderlijke opbrengsten of resultaten. Het verrassende is dus dat blijkt dat we niet a priori gebonden zijn aan utiliteit uitgedrukt in harde eenheden als guldens, maar dat ook subjectieve (waarde) oordelen in utiliteitstermen uitgedrukt kunnen worden, waarmee vervolgens op dezelfde wijze gerekend kan worden! Ook de loterijprijzen kunnen we in andere termen formuleren dan geldeenheden. Bijvoorbeeld in onderwijsterminologie kunnen we de hoofdprijs formuleren als het bereiken van de geformuleerde doelstellingen, met alternatieve prijs het mislukken van de studie nadat daar al een x aantal jaren in geïnvesteerd is.

Voorzover het nog niet tot de lezer is doorgedrongen: niet alleen leveren de berekeningen volgens de loterijmethode waarden op die we onderling kunnen vergelijken om te kunnen kiezen voor de grootste lotwaarden. maar ook kunnen we de verkregen lotwaarden weer terugvertalen in bijv. geld, eventueel met gebruikmaking van de indifferentiecurve wanneer we die al geconstrueerd zouden hebben. De waarde van een beslissingsprobleem als geheel kunnen we dan ook in de gewenste eenheden uitdrukken.

N.B. In het grote voorbeeld kan tegen een bepaalde prijs informatie verkregen worden. Bij het rekenen volgens het loterij model is het handig om deze kosten eerst van de opbrengsten af te trekken, en dan pas voor deze opbrengsten de lotwaarden te substitueren.