

[12 september 1975, eigen aantekening en/of intern COWO]
[dit is een transcriptie van een scan, dat kan tot fouten in de gegeven formules hebben geleid; check tegen hetmanuscript]

HET NEMEN VAN BESLISSINGEN

[2002, inhoudelijke opmerking: In dit stuk veel nadruk op het vinden van nutsfuncties, in casu het drempelgeval, door middel van subjectieve methoden en de lotjes-procedure. Om een schaal voor nut te verkrijgen, bovendien, die als waarschijnlijkheidsschaal mag worden behandeld. Dat is vreselijk moeizaam. De ontwikkeling rond 2000 is dat het meestal mogelijk is om objectieve nutsfuncties te construeren, dat scheelt een hoop gedoe. Zie het SPA=model]

De beginselen van het op rationele wijze nemen van beslissingen, wanneer meerdere alternatieven voorhanden zijn.

In de tekst wordt het eenvoudigste geval besproken, het kiezen tussen twee alternatieve handelwijzen, waarbij een drempelverliesfunctie gehanteerd wordt.

Belangrijkste onderwerp is eigenlijk de wijze waarop aan verschillende uitkomsten van een beslissingsprocedure waarden, utiliteiten, kunnen worden toegekend die het mogelijk maken de beste strategie te berekenen. Het laatste is misschien in eenvoudige beslissingsproblemen niet zo relevant, maar wordt dat wel wanneer het aantal alternatieven, en het aantal mogelijke uitkomsten, groter wordt.

Dit stuk kan gezien worden als een bijlage bij komende rapporten over beoordeling, selectie en cesuur problematiek. Het is dan ook tamelijk fundamenteel van karakter (zij het dat de presentatie nogal uit de losse hand is gebeurd: tenslotte zijn er teksten beschikbaar waarin een en ander op wiskundig verantwoorde wijze is behandeld). Ook bij de Bayesiaanse statistiek is het van belang utiliteiten van verschillende mogelijke resultaten te kunnen bepalen.

Uitvoerige voorbeelden zijn in dit stuk niet gegeven, die komen in de uitwerking in genoemde rapporten aan de orde.

Behandeld wordt het beslissingsprobleem waarbij een keuze gedaan wordt tussen twee alternatieven, en waarbij slechts van belang is of de beslissing achteraf juist blijkt te zijn of niet. Hoe beperkt deze problematiek er ook uitziet, toch zijn veel belangrijke 'beslissingsproblemen tot deze vorm terug te brengen. Voorbeelden zijn: selectie voor onderwijs en beroep, stellen van diagnoses, kiezen van behandeling e.d. (bedoeld wordt dat in een aantal belangrijke gevallen deze beslissingen tot het in de aanhef genoemde simpele model zijn te herleiden, niet dat dat noodzakelijk altijd zo eenvoudig zal liggen).

Het is gebruikelijk om verschillende mogelijke beslissingen aan te duiden met de letter d met subscript 1,2,... . Daarnaast zullen we om de uiteenzetting een wat vriendelijker karakter te laten behouden de beide mogelijke beslissingen in het te bespreken model accepteren en afwijzen noemen. Zodat

beslissing d1 : accepteren;
 d2 : afwijzen.

Voor ieder alternatief is voor ons slechts van belang of de beslissing terecht of ten onrechte genomen is. (De analyse kan op eenvoudige wijze door de lezer zelf uitgebreid worden naar beslissingsproblemen waarbij iedere beslissing meer aan twee mogelijke gevolgen heeft. In de literatuur zijn complexere modellen te vinden, zie o.a. Cronbach & Gleser 1955).

De indeling in ten onrechte of terecht genomen beslissingen is voor ons doel niet zo handig. Mogelijke uitkomsten zijn afhankelijk van bepaalde standen van zaken die zich voor kunnen doen. Voor de keuze tussen accepteren en afwijzen van personen is bijv. van belang of de betrokken persoon 'geschikt' of 'ongeschikt' is voor de taak waarvoor hij eventueel geaccepteerd wordt. Deze 'geschiktheid' is een eigenschap die vaak pas ten volle in het daglicht treedt nadat de beslissing tot accepteren is genomen. Op het moment van beslissen is de geschiktheid van een bepaalde persoon een onzekere zaak: hij

kan later geschikt, naar ook ongeschikt blijken te zijn. Het geschikt of ongeschikt zijn is geen gevolg van de genomen beslissing, maar een daarvan losstaande gebeurtenis. Dergelijke gebeurtenissen geven we aan met de letter a, en in ons voorbeeld met twee mogelijke gebeurtenissen a1 en a2 zullen we deze noemen:

gebeurtenis a1: de persoon is geschikt;
gebeurtenis a2: de persoon is ongeschikt.

Beide beslissingen d1 en d2 samen met beide gebeurtenissen a1 en a2 leveren vier verschillende mogelijke uitkomsten op, uitkomsten die we met de letters C aangeven (waarvoor we straks getallen hopen te kunnen invullen):

uitkomst
C11: accepteren (d1) van een geschikte persoon (a1);
C12: accepteren van een ongeschikte persoon (a2);
C21: afwijzen (d2) van een geschikte persoon (a1);
C22: afwijzen van een ongeschikte persoon (a2);

Handiger is een en ander weer te geven in een beslissingstabel:

	a1: geschikt	a2: ongeschikt
d1 : accepteren	C11	C12
d2 : afwijzen	C21	C22

TABEL 1. Beslissingstabel cesuurprobleem. (voorlopige vorm)

Voor iedere mogelijke uitkomst C beschrijven we zo volledig mogelijk de voor en nadelen. Als blijkt dat we een geschikte persoon hebben geaccepteerd (C11) dan sommen we daarvan de voordelen op, bijv.:

- goed gebruik van de ter beschikking staande onderwijsmiddelen;
- de betrokken persoon krijgt goede onderwijskansen;
- het beeld van de onderwijsinstelling naar buiten wordt versterkt;

- onderwijsklimaat wordt gunstig beïnvloed, e.d.

Dergelijke lijstjes voor- en nadelen worden ook voor C12, C21 en C22 opgesteld.

De kwalitatieve beschrijving van het beslissingsprobleem is dan voorlopig rond. Om op beargumenteerbare gronden een keuze tussen d1 en d2 te kunnen doen, moeten we over kwantitatieve gegevens beschikken.

Vrijwel altijd zal het mogelijk zijn op basis van vroegere ervaringen een schatting te maken over de kans dat een bepaalde persoon geschikt of ongeschikt is. Of, wanneer het over meerdere personen tegelijk gaat: hoe groot het percentage geschikten in de zich aanmeldende groep ongeveer zal zijn.

Aan de gebeurtenissen a1 en a2 kunnen we met andere woorden meestal een bepaalde waarschijnlijkheid toekennen. Stel we weten op basis van vroegere ervaringen dat een groep zich aanmeldende kandidaten voor 80% uit geschikten bestaat (de proportie geschikten is 0,80), dan is de waarschijnlijkheid van a1 gelijk 0,80, en de waarschijnlijkheid van a2 gelijk 0,20:

$$p(a1) = 0,80 \text{ en } p(a2) = 0,20.$$

Om onnodige complicaties te vermijden zullen we verder uitsluitend spreken over beslissingen over één persoon, in dit geval een persoon waarvan we misschien op basis van een examen of tests schatten dat de kans dat hij geschikt is 0,80 is, dat hij ongeschikt is 0,20. Op zich hoeft dit nog helemaal niet in te houden dat deze persoon dan maar snel geaccepteerd moet worden. Het kan best zijn dat het risico verbonden aan het accepteren van iemand die ongeschikt blijkt te zijn zo veel groter is dan het voordeel verbonden aan het toelaten van iemand die geschikt is, dat zelfs een waarschijnlijkheid van 0,80 niet voldoende is om iemand te accepteren. Kennelijk zal de keuze ook af moeten hangen van de waarde die aan ieder van de mogelijke uitkomsten C wordt toegekend. Soms, in eenvoudige situaties, is het wel eens mogelijk die waarde voor de verschillende uitkomsten in

guldens te geven. De keuze tussen d_1 en d_2 wordt dan bepaald door welk van de beide sommen het grootst is:

$$p(a_1) \cdot C_{11} + p(a_2) \cdot C_{12}, \quad \text{of} \\ p(a_1) \cdot C_{21} + p(a_2) \cdot C_{22}$$

Het is echter zelden mogelijk om de uitkomsten in guldens te evalueren, zodat we onmiddellijk verder gaan met de procedure waarbij aan ieder van de mogelijke uitkomsten een utiliteit wordt toegekend, waarmee we net zo kunnen rekenen als hierboven even gebeurde met de in guldens geëvalueerde C 's.

(de nu volgende uiteenzetting, evenals de bovenstaande trouwens, is noodzakelijkerwijs beknopt van aard. Voor een uitvoeriger, vollediger en meer verantwoorde uiteenzetting zie Lindley 1971 chapter 2: a numerical measure for uncertainty, en chapter 4 A numerical measure for consequences.) (Voor een echt degelijke presentatie zie Raiffa & Schlaifer: Applied statistical decision theory, MIT Press).

Voor het verkrijgen van een efficiënte oplossingsprocedure voor keuzeproblemen zou het prettig zijn als we de utiliteiten van ieder van de mogelijke uitkomsten kunnen uitdrukken in getallen die dezelfde eigenschappen hebben als waarschijnlijkheden. Hoe dat tot stand gebracht kan worden zal hier op extreem heuristische wijze beschreven worden: voor details, en een strenge afleiding, zie liever Raiffa & Schlaifer 1961.

Waarschijnlijkheden zijn gelijk aan of liggen tussen 0 en 1. Kunnen we voor utiliteiten ook een dergelijke schaal van 0 tot 1 construeren? Voor een bepaald beslissingsprobleem is het altijd mogelijk om de mogelijke uitkomsten te rangschikken naar 'wenselijkheid', van de slechtst denkbare uitkomst tot de best mogelijke. Zo ligt het voor de hand om in het gegeven voorbeeld het accepteren van een geschikte persoon, C_{11} de beste uitkomst te noemen, en het accepteren van een ongeschikte persoon, C_{12} de slechtste. Uitkomsten zijn altijd onzeker, afhankelijk als ze zijn van de gebeurtenissen a_1 en a_2 waarover geen volledige informatie bestaat. Het is maar een kleine stap van die onzekerheid naar een ander soort onzekerheid die we hanteren om een schaal voor utiliteit vast te stellen. Stel je in gedachten voor dat je in de gelegenheid gesteld wordt om uitkomst

Cij (neem bijv. liet afwijzen van een geschikte persoon, C21) in te ruilen tegen een kans u op uitkomst C11 en een kans (1u) op uitkomst C12 (een kans u op de beste uitkomst, en een kans (1u) op de slechtste uitkomst). In het vervolg spreken we over een lot met kans u op het beste resultaat (waarbij impliciet een kans (1u) op het slechtste resultaat hoort). De hamvraag is dan, hoe groot de kans u op het beste resultaat moet zijn zodat we een zekere uitkomst Cij in willen ruilen tegen een kans u op de beste uitkomst? Die kans moet degene die de beslissing moet nemen, die de verantwoordelijkheid voor die beslissing draagt, zelf op noodzakelijkerwijs vaak enigszins subjectieve gronden bepalen. Dat kan best, wanneer men eenmaal aan deze gedachtengang gewend is geraakt (bedenk dat iemand die moet kiezen tussen beslissingen d1 en d2 zeker in staat moet zijn om de hier bedoelde kans u te schatten, het laatste is zeker niet moeilijker dan de beslissing nemen 'uit het blote hoofd' tussen d1 en d2). De kans, of het lot, dat zo bepaald wordt is de utiliteit van de uitkomst Cij.

Stel ik ontdek, nadat ik besloten heb om deze student af te wijzen, dat hij wel geschikt geweest zou zijn: uitkomst C21. Om de utiliteit van deze uitkomst te bepalen moet ik mij de vraag stellen tegen welke kans u op de best mogelijke uitkomst C11 ik deze uitkomst C21 precies zou willen inruilen (zonder van die 'deal' beter of slechter te worden).

Om de gedachten te bepalen zou ik kunnen beginnen met te zeggen dat deze uitkomst voor mij gelijkwaardig is met een kans 0,50 op een aangenomen geschikte student (en een kans 0,50 op een aangenomen ongeschikte student). Of, veronderstel in gedachten dat er iemand is die over meer informatie beschikt dan ik, en die mij de keuze geeft om een student A af te wijzen waarvan hij mij verzekert dat hij geschikt is, of om een student B te accepteren waarvan hij mij op goede gronden kan verzekeren dat de kans dat hij geschikt is 0,50 is. Als ik het even vervelend vind om student A af te wijzen als ik het vind om student B te accepteren, dan is de keuze van 0,50 als utiliteit voor de uitkomst C21 goed. Geef ik de voorkeur aan afwijzing van een geschikte student, dan vind ik het risico van accepteren van student B kennelijk te groot, en zou de kans op geschiktheid hoger gesteld moeten worden dan 0,50.

Op deze wijze is het altijd mogelijk, om te komen tot een kans op geschiktheid die equivalent is met het afwijzen van iemand waarvan

bekend is dat hij geschikt is. Met andere woorden, iedere uitkomst kan vervangen worden door een loterij met een kans $u(C_{ij})$ op de beste uitkomst C_{11} (in ons voorbeeld) en kans $(1-u)(C_{ij})$ op de slechtste uitkomst C_{12} . De utiliteit van uitkomst C_{ij} is $u(C_{ij})$.

Het is duidelijk dat in ons voorbeeld de utiliteit van de slechtste en beste uitkomst

$$\begin{aligned} u(C_{12}) &= 0, \\ u(C_{11}) &= 1. \end{aligned}$$

Bovenstaande gedachtengang is hoogstwaarschijnlijk niet direct duidelijk; de enige raad die gegeven kan worden is de beide laatste bladzijden een paar keer rustig te bestuderen, en zonodig liever een uitgebreider uiteenzetting zoals hfdst 4 van Lindley 1971 er naast te lezen. De beslissingstabel voor het cesuurprobleem ziet er nu zo uit:

	a1: geschikt	a2: ongeschikt
d1 : accepteren	$u(C_{11})$	$u(C_{12})$
d2 : afwijzen	$u(C_{21})$	$u(C_{22})$

TABEL 2. Beslissingstabel cesuurprobleem.

Het, voorgaande zal voor degenen die met de statistische aanpak van hypothesetoetsing vertrouwd zijn vertrouwd in de oren kunnen hebben geklonken. Immers, ook, daar moeten dit soort kansafwegingen gedaan worden bij het bepalen van de fouten van de eerste en van de tweede orde (α en β) die men bereid is te riskeren. Zijn die kansen eenmaal bepaald, dan kan gezocht gaan worden naar de beste strategie om te kiezen tussen de gestelde en de alternatieve hypothese. Of, zoals hier, tussen alternatief d_1 en d_2 .

Lindley (1971): We have therefore achieved what we set out to obtain, namely a numerical measure of the desirability of any of the consequences in the decision table; called a utility of the consequence. An extremely important point that we shall repeatedly have occasion to emphasize is that this utility is a probability and therefore obeys the rules of probability. This follows since u is the probability of obtaining

the most desirable consequence C

Iedere uitkomst C_{ij} hebben we uitgedrukt in de kans $u(C_{ij})$ op de beste uitkomst C (in het midden latend welke bepaalde uitkomst we in een bepaald geval het best vinden, en niet vergetend dat aan de kans u op het beste resultaat C altijd de kans $(1u)$ op het slechtste resultaat (noem dat c) gekoppeld is). Waar we nu naar gaan zoeken is een mogelijkheid om d_1 en d_2 te kwantificeren.

Stel we besluiten d_1 , en gebeurtenis a_1 blijkt zich voor te doen. We kunnen dan zeggen dat, gegeven d_1 en a_1 , de kans op C, gelijk is aan $u(C_{11})$:

$$p(C \mid d_1 \text{ en } a_1) = u(C_{11}).$$

Als a_2 zich voorgedaan zou hebben, dan

$$p(C \mid d_1 \text{ en } a_2) = u(C_{12}).$$

We kunnen dan gebruik maken van de volgende wet uit de kansrekening:

$$p(x) = p(x \mid y_1) \cdot p(y_1) + p(x \mid y_2) \cdot p(y_2) \quad (\text{als } p(y_1) + p(y_2) = 1)$$

zodat we kunnen schrijven:

$$p(C \mid d_1) = p(C \mid d_1 \text{ en } a_1) \cdot p(a_1) + p(C \mid d_1 \text{ en } a_2) \cdot p(a_2).$$

Omdat $p(a_1)$ en $p(a_2)$ bekend zijn, hebben we hiermee beslissing d_1 gekwantificeerd in termen van een kans p op beste uitkomst C. Als we hetzelfde doen voor beslissing d_2 , dan hoeven we slechts $p(C \mid d_1)$ en $p(C \mid d_2)$ te vergelijken, en kiezen dat alternatief dat de grootste kans op C (de kleinste op c) biedt.

Het is gebruikelijk om $p(C \mid d_i)$ de verwachte utiliteit van d_i te noemen:

$$E(u(d_i)) = p(C \mid d_i).$$

De oplossing van het beslissingsprobleem wordt gevonden door

$$\max(i) E(u(d_i))$$

te vinden, de beslissing d_i met de grootste verwachte utiliteit.

Ons voorbeeld: bekend waren $p(a_1)$ en $p(a_2)$. Veronderstel dat C11 de beste uitkomst is (wat niet noodzakelijk zo hoeft te zijn), C12 de slechtste uitkomst (wat in veel situaties ook anders kan zijn), en dat het afwijzen van een geschikte student even erg is als het accepteren van iemand waarvan we schatten dat de kans dat hij geschikt is 0,75 is, en dat het afwijzen van iemand die ongeschikt is even gunstig is als het accepteren van iemand waarvan we schatten dat de kans 0,95 is dat hij geschikt is. In de beslissingstabel voor dit cesuurprobleem kunnen we dan deze utiliteiten invullen:

	a1: ($p(a_1)=0,80$)	a2: ($p(a_2)=0,20$)
d1: accepteren	$u(C11)=1$	$u(C12)=0$
d2: afwijzen	$u(C21)=0,75$	$u(C22)=0,95$

TABEL 3. Beslissingstabel cesuurprobleem.

Op grond van de gegevens in tabel 3 kunnen we berekenen:

$$\begin{aligned} E(u(d_1)) &= p(C11 | d_1, a_1) \cdot p(a_1) + p(C11 | d_1, a_2) \cdot p(a_2) \\ &= u(C11) \cdot p(a_1) + u(C12) \cdot p(a_2) \\ &= 1 \cdot 0,80 + 0 \cdot 0,20 = 0,8 \end{aligned}$$

en evenzo

$$\begin{aligned} E(u(d_2)) &= u(C21) \cdot p(a_1) + u(C22) \cdot p(a_2) \\ &= 0,75 \cdot 0,80 + 0,95 \cdot 0,20 \\ &= 0,60 + 0,19 = 0,79. \end{aligned}$$

Omdat $E(u(d_1))$ groter is dan $E(u(d_2))$, zij het ook maar met een

kleine verschil, nemen we beslissing d1, en accepteren deze student. Het blijkt dat we redelijk zeker willen zijn van de geschiktheid van een kandidaat willen we besluiten hem te accepteren. Zou dit resultaat niet in overeenstemming zijn met tot nog toe buiten beschouwing gelaten opvattingen over de wijze waarop gehandeld moet worden, dan wordt de analyse overgedaan met expliciet deze andere opvattingen daarbij betrokken.

Volledigheidshalve zullen we ook nog bespreken de aanpak van beslissingsproblemen die werkt met verliezen i.p.v. met utiliteiten. Er is in feite niets nieuws met deze aanpak aan de orde, omdat verliezen in deze besliskundige context gedefinieerd zijn d.m.v.

utiliteiten. We voeren de volgende notatie in:

L_{ij} = het verlies van beslissing d_i bij gebeurtenis a_j ;

u_{ij} = utiliteit van uitkomst C_{ij} .

De definitie van verlies:

$$L_{ij} = \max(i) u_{ij} - u_{ij}$$

Het verlies van beslissing d_i als a_j gebeurt is het verschil tussen de utiliteit van de beste beslissing gegeven dat a_j gebeurt met de utiliteit van beslissing d_i gegeven dat a_j gebeurt.

Op basis van tabel 3 kan dan ook eenvoudig een verlies tabel opgesteld worden:

	a1: geschikt	a2: ongeschikt
d1: accepteren	$L_{11} = 0$	$L_{12} = 0,95$
d2: afwijzen	$L_{21} = 0,25$	$L_{22} = 0$

TABEL 4. Verliestabel cesuurprobleem.

De beste beslissing is dan die met het kleinste verwachte verlies. Het is aan te raden om, wanneer men met verliezen wil werken, altijd eerst alle utiliteiten te bepalen. Er is een enkele toepassing waarin dat niet nodig is, maar dergelijke situaties zijn zeldzaam (bijv. als de C_{ij} in geld te kwantificeren zijn, en de sommen geld klein genoeg zijn

om aan te kunnen nemen dat de utiliteit voor geld lineair is, dan zijn de utiliteiten proportioneel aan de geldbedragen, en de verliezen proportioneel aan verliezen in guldens.)

Wanneer een auteur alleen een verlietabel geeft voor een bepaald beslissingsprobleem, is het mogelijk de utiliteitstabel te reconstrueren wanneer ofwel de als beste gewaardeerde uitkomst aangegeven is, of de als slechtste gewaardeerde uitkomst. Bijv., gegeven tabel 4, dan zijn er twee kandidaten voor de beste uitkomst, C11 en C22. Het is aannemelijk dat C11 de beste is, naar zonder expliciete mededelingen daarover is dat niet helemaal zeker. Als C11 de beste is, dan is $u(C11)=1$ te stellen, dan is $u(C12)=0$, $u(C21)=1-0$, en $u(C22)=0,95$.

Wat zou het resultaat zijn als C22 als de beste uitkomst verondersteld werd? We zouden dan vinden $u(C22)=1$ en $u(C21)=0$ (de beste en slechtste uitkomst) en $u(C11)=0,25$ en $u(C12)=0,05$. De beste beslissing vinden we door op de bekende manier $E(u(d1))$ en $E(u(d2))$ te berekenen en de beslissing met de grootste verwachte utiliteit te nemen.

$$E(u(d1)) = 0,25 \cdot 0,80 + 0,05 \cdot 0,20 = 0,21,$$

$$E(u(d2)) = 0 \cdot 0,80 + 1 \cdot 0,20 = 0,20,$$

zodat ook nu beslissing d1 geprefereerd wordt. Het is eenvoudig aan te tonen dat wanneer meerdere verschillende utiliteitstabellen consistent zijn met een bepaalde gegeven verlietabel, voor alle utiliteitstabellen dezelfde beslissing di de hoogste verwachte utiliteit zal hebben.

Wel is het zo, dat de utiliteitstabel meer informatie bevat dan de verlies tabel. immers, bij een utiliteitstabel past slechts één verlietabel, maar omgekeerd kunnen bij eenzelfde verlietabel meerdere utiliteitstabellen passen.

Cronbach & Gleser, G.C.: Psychological tests and personnel decisions. University of Illinois Press 1965.

Lindley, D.V. Making Decisions. WileyInterscience, 1971.

Raiffa & Schlaifer, Applied statistical decision theory. M.I.T. Press, 1961.